PARTE 4

ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Esercizi di statistica descrittiva	pag. 1
Esercizi sulla probabilità e probabilità CONDIZIONATA	pag. 13
Esercizi sul Calcolo Combinatorio	pag. 32

(ultima pagina: pag. 39)

PARTE 4: ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

ESERCIZI TEST

ESERCIZIO TEST DI STATISTICA

TUTTI GLI ESERCIZI DI STATISTICA SI FANNO ALLO STESSO MODO!

Ci sono questi dati su 10 ammalati di enfisema polmonare:

Paziente	Numero anni di fumo (x_i)	Danni ai polmoni (y_i)
1	25	55
2	36	60
3	22	50
4	15	30
5	48	75
6	39	70
7	42	70
8	31	55
9	28	30
10	33	35

N.B.: I danni ai polmoni si misurano su una scala da 0 a 100 a seconda dell'estensione (per esempio: il numero 55 sui danni ai polmoni sta ad indicare che il 55% dei polmoni è danneggiato)

 ES. TEST (STAT.)

Determinare: (freq. = assoluta, relativa, %)

frequenze, media, mediana, moda degli x_i (e varianza)

frequenze, " " " degli y_i (e varianza)

Covarianza tra gli x_i e gli y_i!

coefficiente di correlazione r.

retta di regressione

Suggerimento: solo per mediana, bisogna mettere i dati in ordine crescente. Per le altre cose, NON è necessario disporre i dati in ordine crescente e si suggerisce di mantenere i dati nell'ordine in cui sono presentati nel testo dell'esercizio.

Notiamo innanzi tutto, che, visto come è formulato l'esercizio, bisogna disporre i dati delle x_i e delle y_i in ordine crescente SOLAMENTE quando si deve calcolare la <u>mediana</u>.
Sarebbe <u>grave errore</u> disporre i dati <u>separatamente</u> in ordine crescente e poi calcolare <u>insieme</u> il coefficiente di correlazione e la covarianza!
Calcoliamo la mediana degli x_i. Disponendo gli x_i in ordine crescente, otteniamo la seguente serie di dati:

15 22 25 28 31 33 36 39 42 48

Chiamiamoli $z_1, z_2, \ldots, z_{10}$, per evitare confusione di notazioni.
In questo caso n è pari, e quindi la mediana è data da $\dfrac{z_{\frac{n}{2}} + z_{\frac{n}{2}+1}}{2}$, cioè dalla media aritmetica dei due dati «centrali», che sono quelli che occupano il 5° e il 6° posto.
Quindi la mediana è data da $\dfrac{z_5 + z_6}{2} = \dfrac{31+33}{2} = \dfrac{64}{2} = 32$.
Calcoliamo ora la mediana degli y_i. Disponiamo gli y_i in ordine crescente, ottenendo la seguente serie di dati:

30 30 35 50 55 55 60 70 70 75

Chiamiamoli $w_1, w_2, \ldots, w_{10}$. La mediana è data da $\dfrac{w_5 + w_6}{2} = \dfrac{55+55}{2} = 55$.
Notiamo anche che tutti gli x_i sono diversi, nessuno si ripete più di una volta, quindi non c'è un valore che si ripete più spesso, e quindi, negli x_i, NON C'È NESSUNA MODA.

Per quanto riguarda gli y_i, per analizzare più da vicino la moda (o le mode), dobbiamo vedere quali dati si ripetono più spesso, e quindi conviene vedere direttamente le FREQUENZE ASSOLUTE. <u>I DATI CHE HANNO LA FREQUENZA ASSOLUTA PIÙ GRANDE SONO LE NOSTRE MODE.</u>

Raggruppiamo gli y_i con le loro frequenze (n.b.: $n = 10$)

Dati y_i	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
30	2	$2/10 = 1/5$	20%
35	1	$1/10$	10%
50	1	$1/10$	10%
55	2	$2/10 = 1/5$	20%
60	1	$1/10$	10%
70	2	$2/10 = 1/5$	20%
75	1	$1/10$	10%
TOTALE:	10	1	100%

I valori corrispondenti alla frequenza massima (che nel nostro caso è 2) sono 30, 55 e 70, che sono dunque le nostre <u>3 MODE.</u>

Invece, siccome gli x_i sono diversi, allora capitano ciascuno UNA VOLTA SOLTANTO, e quindi ognuno di essi ha una frequenza assoluta uguale a 1, una frequenza relativa pari a $\frac{1}{10}$ ($n=10$) e una frequenza percentuale uguale al 10%. La media degli x_i è: $\frac{1}{10}\cdot(25+36+22+15+48+39+42+31+28+33) = \frac{319}{10} = 31{,}9$. La media degli y_i è: $\frac{1}{10}\cdot(55+60+50+30+75+70+70+55+30+35) =$

$$= \frac{1}{10}\cdot(30\cdot2+35\cdot1+50\cdot1+55\cdot2+60\cdot1+70\cdot2+75\cdot1) = \frac{530}{10} = 53$$

x_i	$\bar{x}$	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	y_i	$\bar{y}$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
25	31,9	-6,9	47,61	55	53	2	4	-13,8
36	31,9	4,1	16,81	60	53	7	49	28,7
22	31,9	-9,9	98,01	50	53	-3	9	29,7
15	31,9	-16,9	285,61	30	53	-23	529	388,7
48	31,9	16,1	259,21	75	53	22	484	354,2
39	31,9	7,1	50,41	70	53	17	289	120,7
42	31,9	10,1	102,01	70	53	17	289	171,7
31	31,9	-0,9	0,81	55	53	2	4	-1,8
28	31,9	-3,9	15,21	30	53	-23	529	89,7
33	31,9	1,1	1,21	35	53	-18	324	-19,8
			$\Sigma=876,9$				$\Sigma=2510$	$\Sigma=1148$

TABELLA FONDAMENTALE

Si ha: $(n=10)$

s_X^2 = varianza degli $x_i = \frac{1}{n-1} \cdot 876,9 = \frac{1}{9} \cdot 876,9 = 97,433333... = 97,4\overline{3}$

s_X = scarto quadratico medio degli $x_i = \sqrt{s_X^2} \cong 9,87083$

s_Y^2 = varianza degli $y_i = \frac{2510}{9} \cong 278,888889 = 278,\overline{8}$

s_Y = scarto quadratico medio (o deviazione standard) degli $y_i = \sqrt{s_Y^2} \simeq 16.7$

$cov(X,Y)$ = covarianza tra gli x_i e gli $y_i = \frac{1}{n-1} \cdot 1148 = \frac{1148}{9} \cong 127,55556 = 127,\overline{5}$

r = coefficiente di correlazione $= \frac{Cov(X,Y)}{s_X\, s_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{s_X^2} \cdot \sqrt{s_Y^2}} =$

$$\left[= \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\cancel{\frac{1}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\cancel{\sqrt{\frac{1}{n-1}}}\,\cancel{\sqrt{\frac{1}{n-1}}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} \right]$$

$$= \frac{\text{Codevianza}(X,Y)}{\sqrt{\text{Devianza}(X)\cdot\text{Devianza}(Y)}} =$$

$$= \frac{1148}{\sqrt{876,9}\cdot\sqrt{2510}} = \frac{1148}{\sqrt{876,9\cdot 2510}} \simeq 0,7738$$

Retta di regressione: $y = mx + q$, ove $m = \frac{Cov(X,Y)}{s_X^2} = \frac{\text{Codevianza}(X,Y)}{\text{Devianza}(X)}$

$$\left[= \frac{\cancel{\frac{1}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\cancel{\frac{1}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \right] = \frac{1148}{876,9} \cong 1,309$$

$q = \bar{y} - m\bar{x}$ (per ricavarsi q, basta pensare che <u>la retta di regressione passa per il punto</u> $(\bar{x},\bar{y})$) $= 53 - 1,309 \cdot 31,9 = 11,2429$

L'equazione della retta di regressione è quindi

$$\boxed{y = 1,309 \cdot x + 11,2429}$$

Quale potrebbe essere il danno ai polmoni per chi fuma da 10 anni?

Abbiamo visto che l'equazione della retta di regressione è $\boxed{y = 1{,}309 \cdot x + 11{,}2429}$,

quindi il danno ai polmoni potrebbe essere

$$y(10) = 1{,}309 \cdot 10 + 11{,}2429 = 13{,}09 + 11{,}2429 =$$
$$= 24{,}3329$$

vale a dire, il danno si potrebbe estendere al 24,3329% circa dei polmoni, cioè a quasi $\frac{1}{4}$ dei polmoni.

Esercizio. Si vuole studiare la relazione che intercorre tra la temperatura e il tempo di sopravvivenza (in minuti) di alcuni batteri. I dati sono i seguenti:

Temperatura x_i	Tempo y_i
20	10
24	12
28	18
30	24
32	22
36	20

Si chiede di:

a) Calcolare media, mediana, moda e varianza (campionaria) degli x_i e degli y_i, e rispettive frequenze.

b) Calcolare la covarianza (campionaria) tra gli x_i e gli y_i, il coefficiente di correlazione r e determinare la retta di regressione

c) Determinare la temperatura per cui un batterio sopravvive per 15 minuti

<u>Svolgimento:</u> Innanzi tutto, si vede che sia gli x_i che gli y_i sono diversi fra di loro, e pertanto non vi è nessuno che si ripete più spesso, quindi <u>non</u> c'è una moda (né degli x_i né degli y_i). LE MODE SONO I DATI AVENTI LA FREQUENZA PIÙ GRANDE, quando la frequenza assoluta è ≥ 2.

Es. test. parte 4

Per quanto riguarda le mediane, mettiamo gli x_i e gli y_i in ordine **crescente**.

x_i (già lo sono)	20	24	28	30	32	36
y_i	10	12	18	20	22	24

$n=6$, quindi pari: allora la mediana è uguale alla media aritmetica tra i due valori "centrali", cioè $\frac{1}{2}\cdot\left(x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}\right)$, nel nostro caso $\frac{1}{2}\cdot(x_3+x_4)=$

$=\frac{1}{2}\cdot(28+30)=29$ per gli x_i, e $\frac{1}{2}\cdot(y_3+y_4)=$

$=\frac{1}{2}\cdot(18+20)=19$ per gli y_i.

Le medie $\bar{x}$ ed $\bar{y}$ degli x_i e degli y_i sono

$$\bar{x}=\frac{20+24+28+30+32+36}{6}=\frac{170}{6}=28{,}3333\ldots=28{,}\bar{3}$$

$$\bar{y}=\frac{10+12+18+20+22+24}{6}=\frac{106}{6}=17{,}6667\ldots=17{,}\bar{6}$$

I dati sono diversi fra di loro, e quindi la frequenza assoluta di ciascun x_i e di ciascun y_i è 1. Da ciò segue che la frequenza relativa di ogni x_i e di ogni y_i è $\frac{1}{6}=0{,}166667\ldots=0{,}1\bar{6}$, e la corrispondente frequenza percentuale è $16{,}6667\ldots\%=16{,}\bar{6}\%$

Per le altre cose che sono richieste nell'esercizio, consideriamo la seguente tabella:

-10- Ex. test partie 4

x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$\bar{y}$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
20	28.3333	-8.3333	69,44	10	17,6667	-7,6667	58,78	63,89
24	28.3333	-4.3333	18,78	12	17,6667	-5,6667	32,11	24,56
28	28.3333	-0,3333	0,11	18	17,6667	0,3333	0,11	- 0,11
30	28.3333	1,6667	2,78	24	17,6667	6,3333	40,11	10,56
32	28.3333	3.6667	13,44	22	17,6667	4,3333	18,78	15,89
36	28.3333	7.6667	58,78	20	17,6667	2,3333	5,44	17,89
			Σ 163,33				Σ 155,33	Σ 132,68

Si ha: $(n=6)$ Es. test parte 4

S_X^2 = varianza degli $x_i = \frac{163{,}33}{5} = 32{,}666$

S_X = scarto quadratico medio o deviazione standard degli $x_i = \sqrt{S_X^2} \cong 5{,}7154$

S_Y^2 = varianza degli $y_i = \frac{155{,}33}{5} = 31{,}066$

S_Y = scarto quadratico medio o deviazione standard degli $y_i = \sqrt{S_Y^2} \simeq 5{,}5737$

$Cov(X,Y)$ = covarianza tra gli x_i e gli $y_i = \frac{132{,}68}{5} = 26{,}536$

(Abbiamo considerato la covarianza e le varianze CAMPIONARIE, quindi abbiamo diviso per $n-1=5$)

r = coefficiente di correlazione $= \frac{Cov(X,Y)}{S_X S_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{S_X^2}\cdot\sqrt{S_Y^2}} =$

$$= \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{Codevianza(X,Y)}{\sqrt{Devianza(X)\cdot Devianza(Y)}} =$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{n-1}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})}{\cancel{\sqrt{\frac{1}{n-1}}}\ \cancel{\sqrt{\frac{1}{n-1}}}\ \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\right)}} = \frac{132{,}68}{\sqrt{163{,}33\cdot155{,}33}} \simeq 0{,}833$$

quindi un **BUON** coefficiente di correlazione

Retta di regressione: $y = mx + q$, dove $m = \frac{Cov(X,Y)}{s_x^2} =$

$m = \frac{\text{Codevianza}(X,Y)}{\text{Devianza}(X)}$

$$\boxed{= \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}} = \frac{132{,}68}{163{,}33} = 0{,}812$$

$q = \bar{y} - m\bar{x}$ (per trovare q, pensiamo al fatto che la retta di regressione passa per $(\bar{x}, \bar{y})$) $=$

$= 17{,}6667 - 0{,}812 \cdot 28{,}3333 \simeq -5.34$

Quindi l' equazione della retta di regressione è

$$\boxed{y = 0{,}812\,x - 5{,}34}$$

c) Per trovare la temperatura x per cui un batterio sopravvive per 15 minuti, bisogna porre $15 = 0{,}812 \cdot x - 5{,}34$, quindi si ottiene

$$x = \frac{15 + 5{,}34}{0{,}812} \simeq 25.049$$

Dall'eserciziario di ispirazione

Esercizio (PARTE 4) (Probabilità)

Una scatola contiene 10 palline, 6 verdi (V) e 4 bianche (B), tali che: 4 palline verdi sono lisce e le altre 2 verdi sono ruvide (R); 1 pallina bianca è liscia e le altre 3 bianche sono ruvide. Supposto che ci sia equiprobabilità ed estratta a caso una pallina, calcolare $P(B)$, $P(V)$, $P(R)$, $P(V \cap R)$, $P(B \cap R)$, $P(B|R)$.

Si ha: $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(V) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Le palline ruvide, in tutto, sono $2+3=5$. Quindi $P(R) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(V \cap R) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ (in quanto le palline contemporaneamente verdi e ruvide sono 2).

$P(B \cap R) = \frac{3}{10}$ (le palline contemporaneamente bianche e ruvide sono 3).

Si ha: $P(B|R) = \frac{P(B \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\cancel{10}_{5}} \cancel{2} = \frac{3}{5}$.

Esercizio n. 22, p. 4 (Probabilità)

Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte da poker. Calcolare la probabilità P di estrarre una figura a patto che (= purché) questa sia di fiori o di picche.

Le figure di ~~fiori~~ e picche sono 6

♣ ♣ ♣ ♠ ♠ ♠
J Q K J Q K

Quindi $P = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$

ESERCIZIO PROB. CONDIZIONATA

Ci sono 20 palline, di cui 12 bianche e 8 nere. Si fanno due estrazioni, e si considera sia il caso senza reimbussolamento sia il caso con reimbussolamento. Indichiamo con: B_1 = "pallina bianca alla 1ª estrazione"; N_1 = "pallina nera alla 1ª estrazione"; B_2 = "pallina bianca alla 2ª estrazione"; N_2 = "pallina nera alla 2ª estrazione". Le palline e le estrazioni non sono "truccate".

a) Calcolare $P(N_1)$

b) Calcolare $P(B_2 \cap N_1)$, sia senza reimbussolamento sia con reimbussolamento

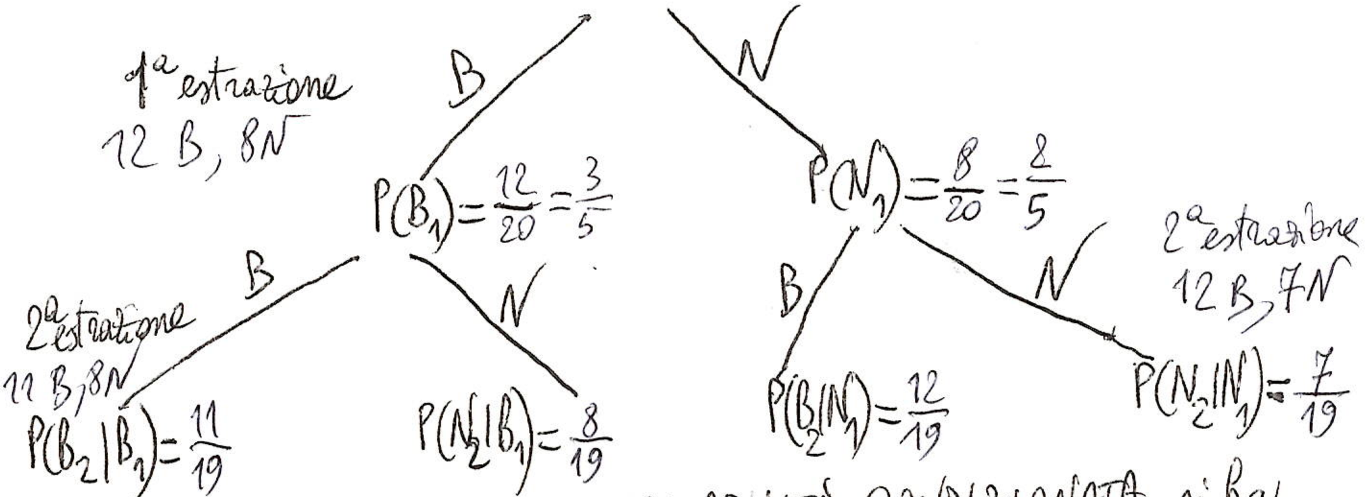
a) Considerando la definizione "classica" di probabilità

$$P(E) = \frac{\text{numero dei casi favorevoli ad } E}{\text{numero di tutti i casi possibili}}$$

, allora si ha

$$P(N_1) = \frac{\text{numero delle palline nere}}{\text{numero totale delle palline}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

b) Consideriamo dapprima il caso senza reimbussolamento, e allora facciamo l'albero. (la prima pallina, una volta estratta, NON viene rimessa nell'urna)



Per la DEFINIZIONE DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA, si ha

$P(B_2|N_1) = \dfrac{P(B_2 \cap N_1)}{P(N_1)}$. Moltiplicando entrambi i membri di questa uguaglianza per $P(N_1)$, si ottiene

$$P(B_2 \cap N_1) = P(B_2|N_1) \cdot P(N_1) = \frac{12}{19} \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{95}$$

Ora vediamo il caso con reimbussolamento (cioè la prima pallina, una volta estratta, VIENE rimessa nell'urna). In questo caso le estrazioni sono indipendenti, e pertanto gli eventi B_2 e N_1 sono indipendenti. Quindi si ha, per la DEFINIZIONE di eventi indipendenti:

$P(B_2 \cap N_1) = P(B_2) \cdot P(N_1) = P(B_1) \cdot P(N_1)$ (le estrazioni sono indipendenti, e in questo caso alla 2ª estrazione si "ricomincia da capo", e quindi – in termini di probabilità – la 2ª estrazione "si comporta" come la 1ª) $= \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{25}$

ESERCIZIO PROB. CONDIZIONATA

Ci sono 19 palline, di cui 11 bianche e 8 nere. Si fanno due estrazioni, e si considera sia il caso senza reimbussolamento sia il caso con reimbussolamento. Indichiamo con: B_1 = "pallina bianca alla 1ª estrazione"; N_1 = "pallina nera alla 1ª estrazione"; B_2 = "pallina bianca alla 2ª estrazione"; N_2 = "pallina nera alla 2ª estrazione". Le palline e le estrazioni non sono "truccate".

a) Calcolare $P(B_1)$

b) Calcolare $P(N_2 \cap B_1)$, sia senza reimbussolamento sia con reimbussolamento

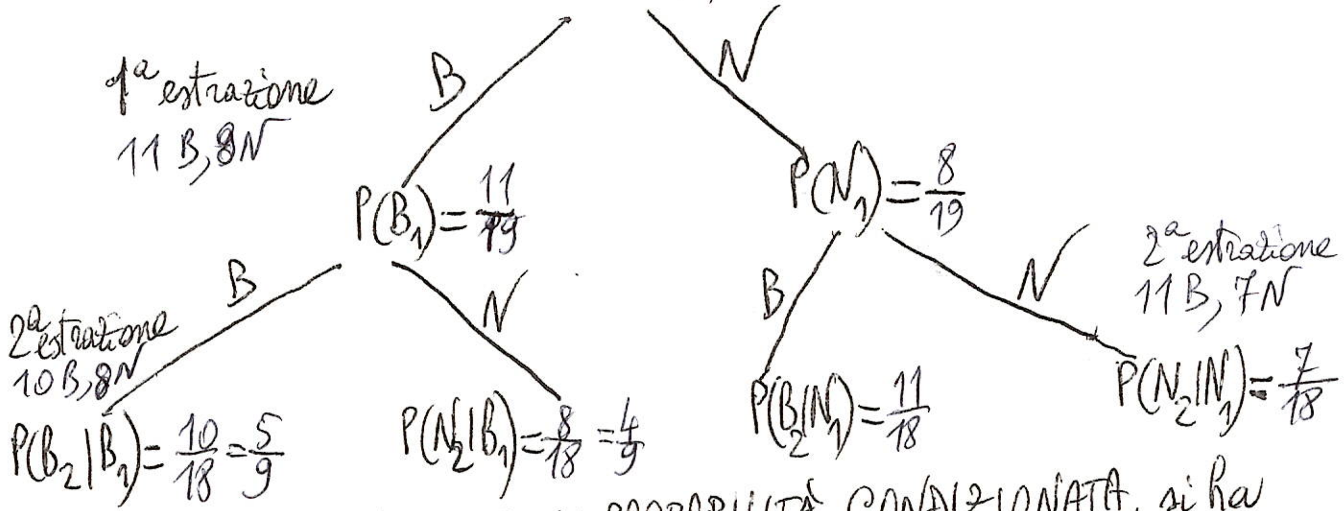
a) Considerando la definizione "classica" di probabilità

$$P(E) = \frac{\text{numero dei casi favorevoli ad } E}{\text{numero di tutti i casi possibili}}$$

, allora si ha

$$P(B_1) = \frac{\text{numero delle palline bianche}}{\text{numero totale delle palline}} = \frac{11}{19}$$

b) Consideriamo dapprima il caso senza reimbussolamento, e allora facciamo l'<u>albero</u>. (la prima pallina, una volta estratta, <u>NON</u> viene rimessa nell'urna)



Per la DEFINIZIONE DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA, si ha

$P(N_2 | B_1) = \dfrac{P(N_2 \cap B_1)}{P(B_1)}$. Moltiplicando entrambi i membri di questa uguaglianza per $P(B_1)$, si ottiene

$$P(N_2 \cap B_1) = P(N_2 | B_1) \cdot P(B_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{11}{19} = \frac{44}{171}$$

Ora vediamo il caso con reimbussolamento (cioè la prima pallina, una volta estratta, VIENE rimessa nell'urna). In questo caso le estrazioni sono indipendenti, e pertanto gli eventi N_2 e B_1 sono indipendenti. Quindi si ha, per la DEFINIZIONE di eventi indipendenti:

$P(N_2 \cap B_1) = P(N_2) \cdot P(B_1) = P(N_1) \cdot P(B_1)$ (le estrazioni sono indipendenti, e in questo caso alla 2ª estrazione si "ricomincia da capo", e quindi — in termini di probabilità — la 2ª estrazione "si comporta" come la 1ª) $= \dfrac{8}{19} \cdot \dfrac{11}{19} = \dfrac{81}{361}$

ESERCIZIO TEST PROB. CONDIZIONATA

Un' urna contiene 10 palline, di cui 3 bianche (B) e 7 nere. Si fanno 3 estrazioni:

a) senza reimbussolamento (cioè la pallina <u>non</u> viene rimessa nell' urna)

b) con reimbussolamento (cioè la pallina viene rimessa nell' urna).

Qual è la probabilità di estrarre 0, 1, 2, 3 palline bianche nei due casi?

a) senza reimbussolamento: (v. ALBERO pagina seguente)

$$P(B=0) = P(N \cap N \cap N) \xrightarrow[\text{condizionata}]{\text{prob.}} P(N|N \cap N) \cdot$$

$$\cdot P(N \cap N) = P(N|N \cap N) \cdot P(N|N) \cdot P(N) =$$

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{7}{\cancel{10}} = \frac{7}{24} \simeq 0,292 \simeq 29,2\%$$

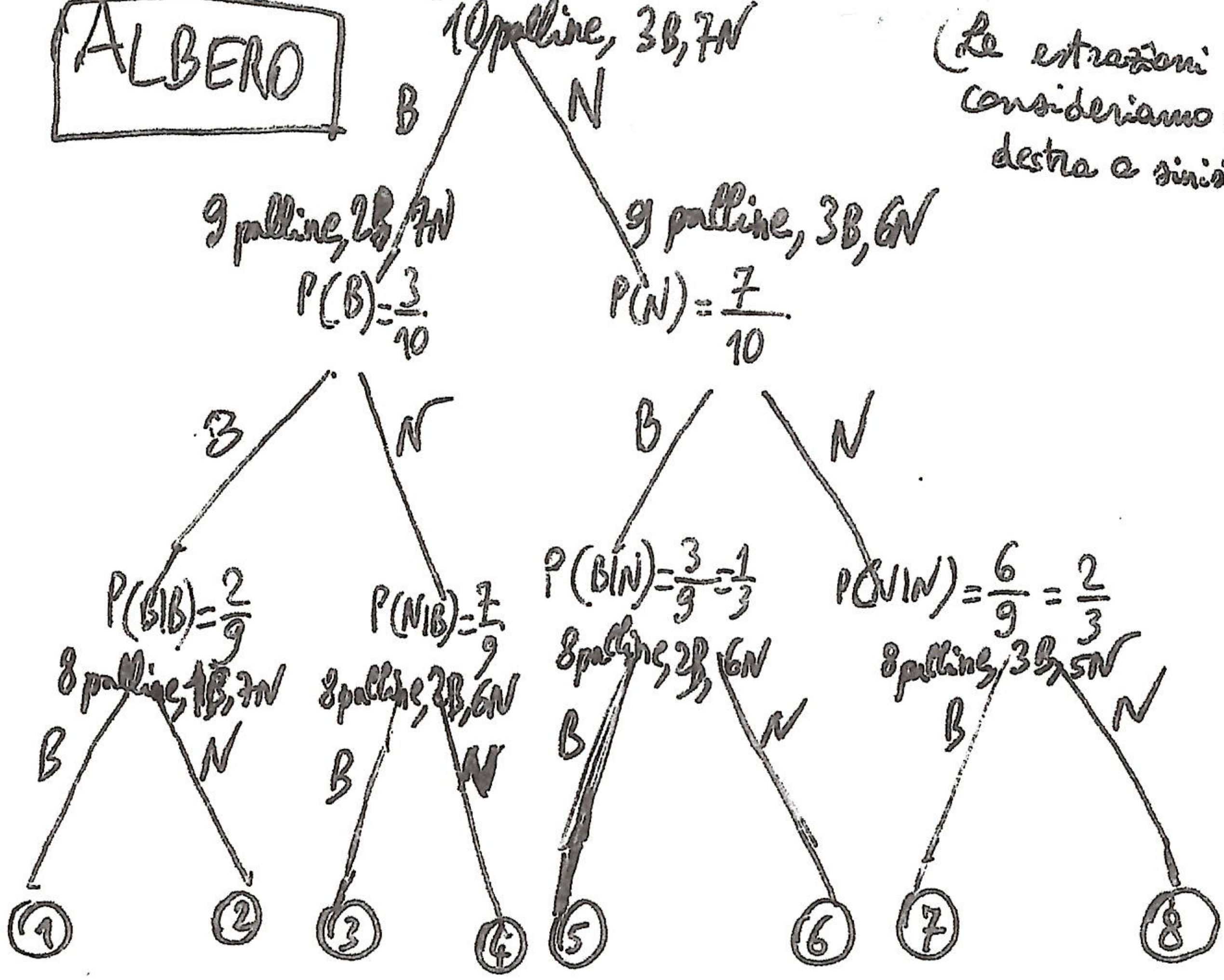
$P(N) = \frac{7}{10}$, 7 palline nere su 10 totali

$P(N|N)$: sappiamo che il nostro "universo" è cambiato: la 1ª pallina è uscita nera: quindi abbiamo 6 palline nere su 9 totali $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$P(N|N \cap N)$: sappiamo che le prime 2 palline sono nere: quindi abbiamo 5 palline nere su 8 totali: pertanto $P(N|N \cap N) = \frac{5}{8}$.

ALBERO

(Le estrazioni le consideriamo da destra a sinistra)



1 $P(B|B\cap B) = \frac{1}{8}$ 2 $P(N|B\cap B) = \frac{7}{8}$

3 $P(B|N\cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 4 $P(N|N\cap B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

5 $P(B|B\cap N) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 6 $P(N|B\cap N) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

7 $P(B|N\cap N) = \frac{3}{8}$ 8 $P(N|N\cap N) = \frac{5}{8}$

ATTENZIONE: le estrazioni delle palline B e N si leggono da destra!

$$P(B=1) = P\left((B\cap N\cap N)\cup(N\cap B\cap N)\cup(N\cap N\cap B)\right) =$$

(sono eventi incompatibili)

$$= P(B\cap N\cap N) + P(N\cap B\cap N) + P(N\cap N\cap B) =$$

= (analogamente come prima, con la definizione di probabilità condizionata)

$$= P(B|N\cap N)\cdot P(N\cap N) + P(N|B\cap N)\cdot P(B\cap N) + P(N|N\cap B)\cdot P(N\cap B) =$$

$$= P(B|N\cap N)\cdot P(N|N)\cdot P(N) + P(N|B\cap N)\cdot P(B|N)\cdot P(N) +$$

$$+ P(N|N\cap B)\cdot P(N|B)\cdot P(B) = \ldots$$

All'inizio, 3 palline bianche e 7 nere, quindi $P(B)=\frac{3}{10}$ $P(N)=\frac{7}{10}$. Se la 1^a estratta è bianca, allora rimangono 9 palline, di cui 2 bianche e 7 nere.

Se la 1^a estratta è nera, allora rimangono 9 palline, di cui 3 bianche e 6 nere. Pertanto

$$P(B|B)=\frac{2}{9},\ P(N|B)=\frac{7}{9},\ P(B|N)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\ P(N|N)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Se la 1^a e la 2^a estratta sono nere, allora rimangono 8 palline, di cui 3 bianche e 5 nere. Allora

$$P(B|N\cap N)=\frac{3}{8},\ P(N|N\cap N)=\frac{5}{8}.$$

Se la 1^a e la 2^a estratta sono tutte e due bianche, allora rimangono 8 palline, di cui 1 bianca e 7 nere
Quindi $P(B|B \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(N|B \cap B) = \frac{7}{8}$.

Se la 1^a estratta è bianca e la seconda è nera (oppure se la 2^a estratta è bianca e la 1^a è nera), rimangono 8 palline, di cui 2 bianche e 6 nere. Allora

$$P(B|N \cap B) = P(B|B \cap N) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad P(N|N \cap B) = P(N|B \cap N) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Quindi
$$P(B=1) = P(B|N \cap N) \cdot P(N|N) \cdot P(N) +$$
$$+ P(N|B \cap N) \cdot P(B|N) \cdot P(N) + P(N|N \cap B) \cdot P(N|B) \cdot P(B) =$$
$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_4} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{7}{10} + \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{7}{10} + \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{7}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{3}}{10} =$$
$$= \frac{7}{40} + \frac{7}{40} + \frac{7}{40} = \frac{21}{40} = 0{,}525, \text{ cioè } 52{,}5\%.$$

(Come si vede anche se leggiamo i valori direttamente sull'albero)

$$P(B=2)=P\big((B\cap B\cap N)\cup(B\cap N\cap B)\cup(N\cap B\cap B)\big)=$$

(sono eventi incompatibili)

$$=P(B\cap B\cap N)+P(B\cap N\cap B)+P(N\cap B\cap B)=$$

(con la definizione di probabilità condizionata)

$$=P(B\,|\,B\cap N)\cdot P(B\cap N)+P(B\,|\,N\cap B)\cdot P(N\cap B)+P(N\,|\,B\cap B)\cdot P(B\cap B)=$$

$$=P(B\,|\,B\cap N)\cdot P(B\,|\,N)\cdot P(N)+P(B\,|\,N\cap B)\cdot P(N\,|\,B)\cdot P(B)+P(N\,|\,B\cap B)\cdot P(B\,|\,B)\cdot P(B)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{\cancel{9}_3}\cdot\frac{\cancel{6}}{10}+\frac{7}{8}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{10}_5}=3\cdot\frac{7}{120}=\frac{7}{40}=$$

$=0,175$, cioè $17,5\%$

$$P(B=3)=P(B\cap B\cap B)=P(B\,|\,B\cap B)\cdot P(B\cap B)=$$

$$=P(B\,|\,B\cap B)\cdot P(B\,|\,B)\cdot P(B)=\frac{1}{\cancel{8}_4}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{9}_3}\cdot\frac{\cancel{3}}{10}=\frac{1}{120}\simeq 0.008$$

cioè circa 0.8%

N.B.: Osserviamo che $P(B=0)+P(B=1)+P(B=2)+P(B=3)=$
$=0,292+0,525+0,175+0,008=1$,

come l'intuizione suggerisce.

b) Con reimbussolamento (in questo contesto, teniamo conto che le estrazioni possono essere scritte indifferentemente da sinistra a destra oppure da destra a sinistra, perché NON considereremo la probabilità condizionata).

Considerando 3 estrazioni, il nostro "universo" è costituito da $\{NNN, BNN, NBN, NNB, BBN, BNB, NBB, BBB\}$

Qui siamo in presenza di eventi indipendenti essendoci reimbussolamento, cioè "mancanza di memoria": pertanto $\boxed{P(NNN) = P(B=0)} = P(N \cap N \cap N) = P(N) \cdot P(N) \cdot P(N) =$

$= \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \frac{343}{1000} = 0{,}343 = P(B=0) = 34{,}3\%$

$P(B=1) = P((B \cap N \cap N) \cup (N \cap B \cap N) \cup (N \cap N \cap B)) =$ (eventi incompatibili) $= P(B \cap N \cap N) + P(N \cap B \cap N) + P(N \cap N \cap B) =$

$=$ (eventi indipendenti) $= P(B) \cdot P(N) \cdot P(N) + P(N) \cdot P(B) \cdot P(N) +$

$+ P(N) \cdot P(N) \cdot P(B) = \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} =$

$= 3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7^2}{10^2} = \frac{3^2 \cdot 7^2}{10^3} = \frac{21^2}{1000} = \frac{441}{1000} = 0{,}441 = 44{,}1\%$

$P(B=2) = P((B \cap B \cap N) \cup (B \cap N \cap B) \cup (N \cap B \cap B)) =$ (eventi incompatibili) $= P(B \cap B \cap N) + P(B \cap N \cap B) + P(N \cap B \cap B) =$ (eventi indipendenti) $= P(B) \cdot P(B) \cdot P(N) + P(B) \cdot P(N) \cdot P(B) + P(N) \cdot P(B) \cdot P(B) =$

$= 3 \cdot (P(B))^2 \cdot P(N) = 3 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \frac{7}{10} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 7}{1000} = \frac{189}{1000} = 0{,}189 = 18{,}9\%$

$P(B=3) = P(B \cap B \cap B) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(B) = (P(B))^3 = (3/10)^3 = \frac{27}{1000} = 0{,}027 = 2{,}7\%$

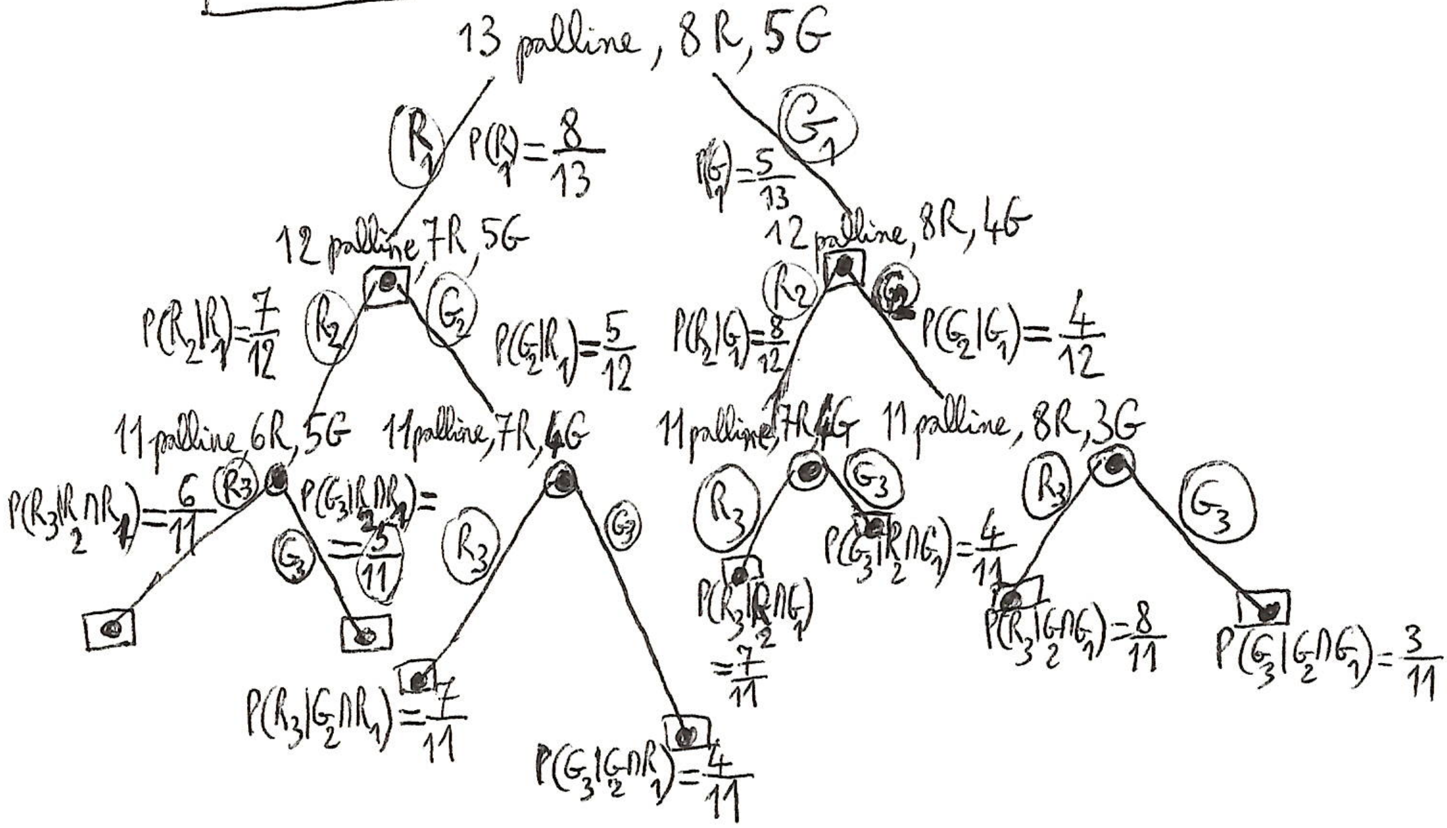
Esercizio — Un sacchetto contiene 8 palline rosse (R) e 5 palline gialle (G). Si effettuano 3 estrazioni successive senza reimbussolamento (ossia senza reintrodurre la pallina estratta nel sacchetto).

a) Qual è la probabilità che la prima e la terza pallina estratta siano entrambe rosse?

b) Qual è la probabilità che tutte e 3 le palline siano rosse?

Svolgimento

Indichiamo con G_1, G_2, G_3 "pallina gialla alla 1ª, o 2ª, o 3ª estrazione", e con R_1, R_2, R_3 "pallina rossa alla 1ª, o 2ª, o 3ª estrazione". Nella nostra notazione, <u>CONSIDERIAMO LE ESTRAZIONI DA DESTRA A SINISTRA</u>, e facciamo l' $\boxed{\text{ALBERO}}$:



Ricapitolando, si ha.

$P(R_1)=\frac{8}{13}$ $P(G_1)=\frac{5}{13}$

$P(R_2|R_1)=\frac{7}{12}$ $P(G_2|R_1)=\frac{5}{12}$ $P(R_2|G_1)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ $P(G_2|G_1)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$P(R_3|R_2\cap R_1)=\frac{6}{11}$ $P(G_3|R_2\cap R_1)=\frac{5}{11}$ $P(R_3|G_2\cap R_1)=\frac{7}{11}$ $P(G_3|G_2\cap R_1)=\frac{4}{11}$

$P(R_3|R_2\cap G_1)=\frac{7}{11}$ $P(G_3|R_2\cap G_1)=\frac{4}{11}$ $P(R_3|G_2\cap G_1)=\frac{8}{11}$ $P(G_3|G_2\cap G_1)=\frac{3}{11}$

Iniziamo dal punto b). Si ha, applicando la definizione di probabilità condizionata:

$$P(R_3\cap R_2\cap R_1)=P(R_3|R_2\cap R_1)\cdot P(R_2\cap R_1)=P(R_3|R_2\cap R_1)\cdot P(R_2|R_1)\cdot P(R_1)=$$

$$\frac{6}{11}\cdot\frac{7}{\cancel{12}_{3}}\cdot\frac{\cancel{8}^{4}}{13}=\frac{28}{143}\simeq 0{,}196$$

Ora risolviamo il punto a). La probabilità p_1 che la prima e la terza pallina estratta siano entrambe rosse è data da:

$$p_1=P\left((R_3\cap R_2\cap R_1)\cup(R_3\cap G_2\cap R_1)\right)\xlongequal[\text{incompatibili!})]{(\text{eventi}}P(R_3\cap R_2\cap R_1)+$$

$$+P(R_3\cap G_2\cap R_1)\simeq 0{,}196+P(R_3|G_2\cap R_1)\cdot P(G_2|R_1)\cdot P(R_1)\simeq$$

$$\simeq 0{,}196+\frac{7}{11}\cdot\frac{5}{\cancel{12}_{3}}\cdot\frac{\cancel{8}^{2}}{13}\simeq 0{,}196+\frac{70}{429}\simeq 0{,}196+0{,}163\simeq 0{,}359$$

Esercizio sulla probabilità condizionata

Una certa malattia colpisce il 4% di una popolazione. Un test clinico fornisce i seguenti dati: la probabilità che – dato che una persona è malata – il test risulti positivo è il 90%, mentre il test risulta positivo su soggetti sani nel 5% dei casi.
Qual è la probabilità di essere sana per una persona che è risultata positiva al test?

Indichiamo con M l'evento "la persona è malata" e con S l'evento "la persona è sana". Naturalmente, se il 4% degli individui della popolazione è malato, allora il 96% degli individui è sano. Pertanto

$$P(M) = \frac{4}{100} \quad \left(\text{N.B.: } \boxed{k\% = \frac{k}{100}}\right), \quad P(S) = \frac{96}{100}.$$

Indichiamo ora con T_p l'evento "l'individuo è positivo al test". Il testo dell'esercizio dice che dobbiamo calcolare

$$P(S|T_p) \underset{\text{condizionata})}{\overset{\text{(probabilità}}{=}} \frac{P(S \cap T_p)}{P(T_p)} = \frac{P(T_p \cap S)}{P(T_p)}.$$

Ma noi conosciamo $P(T_p|S) = \frac{5}{100}$, $P(T_p|M) = \frac{90}{100}$, $P(S)$ e $P(M)$. Per determinare $P(T_p \cap S)$ osserviamo che ancora per la definizione di probabilità condizionata si ha

$$P(T_p|S) = \frac{P(T_p \cap S)}{P(S)}.$$

Quindi, per determinare $P(T_p \cap S)$, moltiplichiamo qui entrambi i termini per $P(S)$, ottenendo

$$P(T_p \cap S) = P(T_p|S) \cdot P(S) = \frac{5}{100} \cdot \frac{96}{100}.$$

Ora, per determinare $P(T_p)$, adoperiamo il seguente "TRUCCO". Sappiamo che gli insiemi S ed M costituiscono una partizione di tutto lo spazio: $\Omega = S \cup M$, con S ed M disgiunti. Allora si ha:
$T_p = (T_p \cap S) \cup (T_p \cap M)$. Notiamo che anche $T_p \cap S$ e $T_p \cap M$ sono disgiunti (o incompatibili) se considerati come eventi.

Per le proprietà degli eventi incompatibili, essendo
$T_p = (T_p \cap S) \cup (T_p \cap M)$, si ha

$P(T_p) = P(T_p \cap S) + P(T_p \cap M)$

Abbiamo visto che $P(T_p \cap S) = P(T_p | S) \cdot P(S) = \frac{5}{100} \cdot \frac{96}{100}$.

Analogamente, si può vedere che
$$P(T_p \cap M) = P(T_p | M) \cdot P(M) = \frac{90}{100} \cdot \frac{4}{100}$$

Quindi $P(T_p) = \frac{5}{100} \cdot \frac{96}{100} + \frac{90}{100} \cdot \frac{4}{100} = \frac{480+360}{10'000} =$

$= \frac{840}{10'000} = 0{,}084 \left(= \boxed{8{,}4\ \%}\right)$,

$$P(S|T_p) = \frac{P(T_p \cap S)}{P(T_p)} = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{96}{100}}{\frac{840}{10'000}} = \frac{480}{\cancel{10'000}} \cdot \frac{\cancel{10'000}}{840} =$$

$$= \frac{480}{840} = \frac{48}{84} = \frac{\cancel{12} \cdot 4}{\cancel{12} \cdot 7} = \frac{4}{7} \simeq 0{,}571429 = 57{,}1429\ \%$$

Quindi, se una persona risulta positiva a questo test, ha ancora più di metà delle possibilità di essere sana.

Appendice: Adesso, nella situazione dell'esercizio il cui testo è stato dato all'inizio della pagina precedente, determiniamo la probabilità che una persona positiva al test sia malata. Con le stesse notazioni di cui sopra, si ha:

$$P(M|T_p) = \frac{P(T_p \cap M)}{P(T_p)} = \frac{\frac{90}{100} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{840}{10000}} = \frac{360}{\cancel{10000}} \cdot \frac{\cancel{10000}}{840} =$$

$$= \frac{360}{840} = \frac{36}{84} = \frac{\cancel{12} \cdot 3}{\cancel{12} \cdot 7} = \frac{3}{7} \simeq 0{,}428571 = 42{,}8571\ \%.$$

Notiamo che, come l'intuizione suggerisce, si ha: $\boxed{P(S|T_p) + P(M|T_p)} = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = \boxed{1}$. Questo deriva dal fatto che (proprietà degli eventi incompatibili): $P(T_p) = P(T_p \cap S) + P(T_p \cap M)$, e quindi $\boxed{1} = \frac{P(T_p)}{P(T_p)} = \frac{P(T_p \cap S)}{P(T_p)} + \frac{P(T_p \cap M)}{P(T_p)} =$ (probab. condiz.) $\boxed{P(S|T_p) + P(M|T_p)}$. Quindi, conoscendo $P(S|T_p)$, si poteva procedere al calcolo di $P(M|T_p)$ direttamente, osservando che $\boxed{P(M|T_p) = 1 - P(S|T_p)}$.

Esercizio sulla probabilità condizionata

Ci sono 3 fabbriche A, B, C di cioccolatini. Il 20% dei cioccolatini proviene da A, il 30% da B e il 50% da C. La fabbrica A ha il 3%, B ha il 4% e C il 2% di cioccolatini difettosi. Calcolare la probabilità che il cioccolatino sia difettoso, e la probabilità che, dato un cioccolatino difettoso, provenga dalla fabbrica A

IMPOSTAZIONE MATEMATICA DEI DATI

$\Omega = A \cup B \cup C$ sono incompatibili

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \quad P(B) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} \quad P(C) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Dif.}|A) = \frac{3}{100} \quad P(\text{Dif.}|B) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$P(\text{Dif.}|C) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$. Da calcolare:

$$\boxed{P(A|\text{Dif.}) \overset{\text{def.}}{=\!=} \frac{P(\text{Dif.} \cap A)}{P(\text{Dif.})}}$$

TRUCCO: $\Omega = A \cup B \cup C$, quindi $\text{Dif.} = \text{Dif.} \cap \Omega =$
$= \text{Dif.} \cap (A \cup B \cup C) = \boxed{(\text{Dif.} \cap A) \cup (\text{Dif.} \cap B) \cup (\text{Dif.} \cap C)}$
(ove Ω è il nostro insieme "universo") Poiché gli insiemi $\boxed{\text{Dif.} \cap A}$, $\text{Dif.} \cap B$, $\boxed{\text{Dif.} \cap C}$ sono a due a due disgiunti (o incompatibili), allora si ha

$$\boxed{P(\text{Dif.}) = P(\text{Dif.} \cap A) + P(\text{Dif.} \cap B) + P(\text{Dif.} \cap C)}$$

(n.b.: perché $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$)

$P(\text{Dif.} \cap A) = P(\text{Dif.} | A) \cdot P(A)$ [perché, per definizione di probabilità condizionata, $P(\text{Dif.} | A) = \dfrac{P(\text{Dif.} \cap A)}{P(A)}$; moltiplicando per $P(A)$ tutti e due i membri di questa uguaglianza si ottiene infatti $P(A) \cdot P(\text{Dif.} | A) = P(\text{Dif.} \cap A)$] Analogamente, $P(\text{Dif.} \cap B) = P(\text{Dif.} | B) \cdot P(B)$, $P(\text{Dif.} \cap C) = P(\text{Dif.} | C) \cdot P(C)$, quindi

$$\boxed{P(\text{Dif.})} = P(\text{Dif.} \cap A) + P(\text{Dif.} \cap B) + P(\text{Dif.} \cap C) = P(\text{Dif.} | A) \cdot P(A) + P(\text{Dif.} | B) \cdot P(B) + P(\text{Dif.} | C) \cdot P(C) \underset{\text{con i nostri dati)}}{\overset{\text{(sostituiamo}}{=}} \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{0{,}028} = \boxed{2{,}8\%}$$

$$\boxed{P(A | \text{Dif.})} \underset{\text{probabilità condizionata}}{\overset{\text{definizione di}}{=}} \frac{P(\text{Dif.} \cap A)}{P(\text{Dif.})} = \frac{P(\text{Dif.} | A) \cdot P(A)}{0{,}028} =$$

$$= \frac{\frac{3}{100} \cdot \frac{1}{5}}{0{,}028} = \frac{0{,}006}{0{,}028} \cong 0{,}214 \sim 21{,}4\%$$

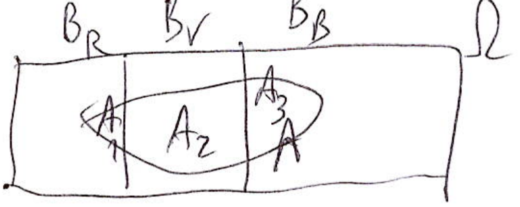
N.B.: Gli esercizi sui cioccolatini buoni e difettosi provenienti da diverse fabbriche (A, B, C...) sono <u>dello stesso tipo</u> degli esercizi sugli individui sani, malati, che risultano positivi a un test... (<u>PROBABILITÀ CONDIZIONATA</u>)

ALLENARSI CON L'ESERCIZIARIO
DI ISPIRAZIONE !!

Ancora esercizi sulla probabilità condizionata

Esercizio: In un ufficio, il lavoro è svolto al 30% da Rossi, al 25% da Verdi e al 45% da Bianchi. Le pratiche preparate dai Signori Rossi, Verdi e Bianchi contengono rispettivamente 0,01% 0,005% e 0,003% di errori, e ogni pratica è fatta da un solo impiegato.
Qual è la probabilità che una pratica è fatta da Rossi dato che presenta errori?

Sia A l'evento che ci siano errori nella pratica e siano B_R, B_V, B_B gli eventi che la pratica è stata elaborata rispettivamente da Rossi, da Verdi e da Bianchi.
Il testo dell'esercizio ci dice di calcolare $P(B_R|A)$.
Dalla definizione di probabilità condizionata sappiamo che $P(B_R|A) = \frac{P(B_R \cap A)}{P(A)}$. Quindi dobbiamo calcolare $P(B_R \cap A)$ e $P(A)$, che ancora non conosciamo.
Ma, dal testo dell'esercizio, conosciamo $P(B_R), P(B_V), P(B_B), P(A|B_R), P(A|B_V), P(A|B_B)$. Allora, intanto ricaviamoci $P(B_R \cap A)$. Conosciamo $P(A|B_R)$ e $P(B_R)$ e, in base alla definizione di probabilità condizionata, si ha $\boxed{P(A|B_R) = \frac{P(B_R \cap A)}{P(B_R)}}$ Quindi la quantità da trovare è $P(B_R \cap A)$. Moltiplicando per $P(B_R)$ entrambi i membri, si ottiene: $P(B_R \cap A) = P(B_R) \cdot P(A|B_R) = (\ldots)$
(N.B.: Usiamo il fatto che $\boxed{k\% = \frac{k}{100}}$, che è la relazione fondamentale nelle percentuali...)
$(\ldots) = 0,3 \cdot 0,0001 = 0,00003$ (n.b.: $30\% = \frac{30}{100} = 0,3$; $0,01\% = \frac{0,01}{100} = 0,0001$). Adesso vogliamo calcolare $P(A)$. A questo scopo useremo un trucco (si ricorre a una "partizione")



Notiamo che $\{B_R, B_V, B_B\}$ costituisce una partizione di tutto lo spazio Ω nel senso che <u>ogni</u> pratica è preparata da uno solo degli impiegati Rossi, Verdi e Bianchi. Quindi: $\Omega = B_R \cup B_V \cup B_B$ (e gli insiemi B_R, B_V e B_B sono a due a due disgiunti). Da ciò segue (come si vede anche dalla figura) che

$$A = \boxed{\underbrace{(A \cap B_R)}_{A_1} \cup \underbrace{(A \cap B_V)}_{A_2} \cup \underbrace{(A \cap B_B)}_{A_3}}$$

(dove $A \cap B_R$, $A \cap B_V$, $A \cap B_B$ sono a 2 a 2 disgiunti, quindi, visti come eventi, sono eventi incompatibili, ossia a 2 a 2 senza elementi comuni). Per le proprietà degli eventi incompatibili si ha:

$$P(A) = P(A \cap B_R) + P(A \cap B_V) + P(A \cap B_B)$$

Nella pagina precedente ci siamo ricavati

$$P(A \cap B_R) = P(B_R \cap A) = P(B_R) \cdot P(A|B_R)$$

usando la probabilità condizionata. Con la stessa tecnica, si può vedere che

$$P(A \cap B_V) = P(B_V) \cdot P(A|B_V) \quad , \quad P(A \cap B_B) = P(B_B) \cdot P(A|B_B).$$

Si ha:

$$P(A) = P(A \cap B_R) + P(A \cap B_V) + P(A \cap B_B) = P(B_R) \cdot P(A|B_R) + P(B_V) \cdot P(A|B_V) + P(B_B) \cdot P(A|B_B) = 0{,}3 \cdot 0{,}0001 + 0{,}25 \cdot 0{,}00005 + 0{,}45 \cdot 0{,}00003$$

(lo possiamo lasciare così perché è richiesto solo $\underline{P}(B_R|A)$ nell'esercizio).

$$P(B_R|A) = \frac{P(B_R \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_R)}{P(A)} = \frac{0{,}00003}{0{,}3 \cdot 0{,}0001 + 0{,}25 \cdot 0{,}00005 + 0{,}45 \cdot 0{,}00003}$$

$\cong$ (calcolatrice ....) $0{,}537 = 53{,}7\%$

ESERCIZI TEST parte 4

Esercizio PROB (Calcolo combinatorio)

Considerando le cifre 2, 3, 5, 7, quanti numeri di tre cifre diverse che iniziano con 7 si possono formare?

Innanzi tutto, l'ordine conta: per esempio $753 \neq 735$.

Si tratta di riempire 2 posti (e non 3, perché il 1° posto è già occupato dal 7), e con 3 cifre (e non ~~4~~, perché non sono ammesse ripetizioni: il numero 7 è già utilizzato per la 1ª cifra, e non si può usare più). Si tratta quindi di DISPOSIZIONI SEMPLICI di 3 oggetti a 2 a 2.

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6$$

I numeri sono: 723 732 725 752 735 753

ESERCIZI TEST parte 4

Esercizio (Calcolo combinatorio)

Considerando le cifre 2,3,5,7, quanti sono tutti i possibili numeri di 3 cifre (anche uguali) che iniziano per 7?

Innanzi tutto, notiamo che l'ordine conta: ad esempio, $735 \neq 753$.
Nel nostro contesto, si tratta di riempire 2 posti con 4 cifre (2 posti, perché il primo dei 3 posti è stato già occupato dal 7; 4 cifre, perché sono ammesse ripetizioni, quindi anche cifre uguali, e quindi tutte le cifre sono "in gioco", compreso il 7). Si tratta quindi di disposizioni con ripetizione di 4 oggetti a 2 a 2.

$D^{(r)}_{n,k} = n^k$, quindi nel nostro caso i numeri sono $4^2 = 16$. Eccoli:

722	732	752	772
723	733	753	773
725	735	755	775
727	737	757	777.

ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE PARTE 4

Esercizio sul Calcolo Combinatorio

Determinare in quanti modi può finire un campionato di calcio al quale partecipano 12 squadre (cioè: quante <u>classifiche</u> ci sono)

Poiché si tratta di classifiche, allora l'ordine <u>conta</u>. Inoltre ogni squadra, in una classifica, occupa un <u>solo</u> posto (si suppone implicitamente che non ci siano situazioni del tipo "ex-aequo" ...), e pertanto NON CI SONO RIPETIZIONI. Si tratta quindi di disposizioni semplici di 12 elementi a 12 a 12, cioè di permutazioni di 12 elementi, che sono 12! Vediamolo più in dettaglio. Il primo posto può essere occupato in 12 modi diversi (da una delle 12 squadre presenti). Una volta che viene occupato il 1° posto, rimangono 11 squadre: pertanto il secondo posto può essere occupato in 11 modi diversi e, per il "principio fondamentale", i primi 2 posti possono essere occupati in $12 \cdot 11$ modi diversi. Una volta occupati i primi 2 posti, rimangono 10 squadre: quindi il 3° posto può essere occupato in 10 modi diversi, e ancora una volta per il "principio fondamentale", i primi 3 posti possono essere occupati in $12 \cdot 11 \cdot 10$ modi diversi. Continuando, si arriva a

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1° posto	2° posto	3° posto	4° posto	5° posto	6° posto	7° posto	8° posto	9° posto	10° posto	11° posto	12° posto

quindi, i modi diversi di occupare tutti e 12 i posti, cioè il numero totale delle possibili classifiche, sempre per il "principio fondamentale", è

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{12!}$$

PARTE 4 ESERCIZIO TEST (Calcolo Combinatorio)

Determinare quanti numeri si possono formare usando <u>insieme</u> le cifre 4, 4, 5, 6, 7.

"Insieme" vuol dire: utilizzando <u>tutte</u> le cifre 4, 4, 5, 6, 7. Si tratta di fare gli ANAGRAMMI del numero 44567. Se fossero 5 cifre diverse, sarebbero 5!, ma due cifre coincidono, e quindi bisogna dividere per 2!, i modi di disporsi di 2 cifre su 2 posti (quindi sempre PERMUTAZIONI).

Quindi le possibilità sono $\frac{5!}{2!} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}} = 60.$

Si tratta di PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE.

ESERCIZI TEST

a) In un torneo di 4 squadre, quante partite di sola andata si giocano? b) E quante partite di andata e ritorno?

Nel caso a), l'ordine non conta perché sono partite di sola andata, quindi dire Juventus - Milan è la stessa cosa che dire Milan - Juventus. Inoltre non sono ammesse ripetizioni, perché una squadra non può giocare contro se stessa. Sono quindi COMBINAZIONI SEMPLICI $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Nel nostro caso,

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{4}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2}} = 6.$$

Nel caso b) naturalmente non ci sono ripetizioni, ma questa volta, essendo partite sia di andata sia di ritorno, L'ORDINE CONTA: ad esempio, Juventus - Milan si gioca a Torino, mentre Milan - Juventus si gioca a Milano, e quindi sono due partite diverse. Si tratta di DISPOSIZIONI SEMPLICI $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$, nel nostro caso

$$D_{4,2} = \frac{4!}{2!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 4}{\cancel{1 \cdot 2}} = 12$$ (Cioè IL DOPPIO di 6, come l'intuizione suggerisce)

ESERC. TEST parte 4.

DOMANDA: Sia $0 \leq k \leq n$ (k ed n interi)

Quanti sono i sottoinsiemi di k elementi dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$?

Innanzi tutto, l'ordine NON CONTA, perché, ad esempio, gli insiemi $\{1,2\}$ e $\{2,1\}$ SONO LA STESSA COSA.

Inoltre non ci sono ripetizioni (naturalmente, gli elementi di un insieme sono contati una volta sola: infatti, per esempio, non si dice $\{2,2\}$, ma si dice $\{2\}$). Quindi si tratta di COMBINAZIONI SENZA RIPETIZIONE $\boxed{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

Esempio: $n = 4$, $k = 2$ $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cancel{4}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{2}} = 6$

I sottoinsiemi di 2 elementi dell'insieme $\{1,2,3,4\}$ sono: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$.

Es. 1, pag. 38 Quanti sono i terni al lotto?

Si tratta di una "scelta" di 3 numeri su 90.

I 3 numeri devono essere, ovviamente, VERAMENTE 3, cioè 3 numeri DISTINTI, quindi non ci sono ripetizioni. Inoltre l'ordine non conta: è importante solo che compaiano quei 3 numeri che abbiamo "giocato" (cioè per esempio, (5, 12, 13) e (12, 13, 5) sono "la stessa cosa").

Si tratta quindi di COMBINAZIONI SEMPLICI DI 90 OGGETTI A 3 A 3, il cui numero è

$$\binom{90}{3} = \frac{90!}{3!\cdot 87!} = \frac{\cancel{1\cdot 2 \ldots 87}\cdot 88\cdot 89\cdot \cancel{90}^{15}}{\cancel{6}\cdot\cancel{1\cdot 2\ldots 87}} = 117'480$$

Es. 2, pag. 38 Si giocano 13 partite di calcio. Una partita è del tipo Squadra A — Squadra B, ove la Squadra A gioca in casa (e si indica per prima) e la Squadra B gioca fuori casa. Il simbolo 1 indica la vittoria della squadra che gioca in casa; il simbolo 2 indica la vittoria della squadra che gioca in trasferta; il simbolo X indica il pareggio. Quant'è il numero totale di TUTTE LE POSSIBILI COLONNE COSTITUITE DA 13 ELEMENTI, CON IL VINCOLO CHE OGNUNO DI QUESTI ELEMENTI DEV'ESSERE NECESSARIAMENTE O UN 1, O UN 2, OPPURE UN X?

Quindi bisogna "piazzare", "sistemare", "collocare" i 3 simboli 1, 2, X in 13 caselle. L'ordine conta, perché ovviamente le partite sono diverse. Ci sono ovviamente ripetizioni, perché i simboli sono solo 3 e le caselle sono 13, quindi almeno uno si deve ripetere. Sono quindi DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONI DI 3 OGGETTI (n) A 13 a 13 (k). Il numero di queste disposizioni è $n^k = 3^{13} = 1'594'323$.

PARTE 4 CALCOLO COMBINATORIO

ESERCIZIARIO DI ISPIRAZIONE

Es. 2 bis, pag. 39 ~~Ora~~ invece consideriamo il seguente esercizio:

Si devono riempire 13 caselle non numerate con i simboli 1, X, 2. Quante possibili modalità (cioè quante scelte, selezioni) di 1, X, 2 ci sono?
Cioè ci interessano solo il numero di 1, di X e di 2.
Per dire meglio: una di queste "scelte" è fatta così: sette 1, quattro X e due 2, cioè

1111111XXXX22, che in questo contesto è equivalente a 22XXXX1111111. Un'altra può essere: cinque 1, cinque X, tre 2.
Quindi l'ordine non conta, e ci sono ripetizioni (questo necessariamente, perché il numero degli oggetti 1X2, cioè tre, è strettamente minore di tredici (13), che è il numero delle caselle). Si tratta di COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE DI 3 OGGETTI a 13 a 13, che sono
$(n=3, k=13)$

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{15}{13} = \frac{15!}{13!\cdot 2!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdots 13}\cdot \cancelto{7}{14}\cdot 15}{\cancel{1\cdot 2\cdots 13}\cdot \cancel{2}} = 105$$